September 14, 2009

Tema 1: Matrices y Determinantes

1. Matrices

Definición 1.1. Una matriz es un arreglo rectangular de números reales

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Se dice que una matriz es de orden (o tamaño) $n \times m$ si tiene n filas y m columnas. El conjunto de todas las matrices de orden $n \times m$ se denota por $M_{n \times m}$.

El elemento a_{ij} es el que se encuentra en la fila i y la columna j. A veces escribiremos en forma abreviada $A = (a_{ij})_{j=1,\ldots,m}^{i=1,\ldots,n}$ o equivalentemente $A = (a_{ij})$.

Los elementos de la forma a_{ii} se llaman la *diagonal* de la matriz A. Una matriz es *cuadrada* si $n = m$. La *traza* de una matriz cuadrada A es la suma de todos los elementos de su diagonal, $\operatorname{traza}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Definición 1.2. La matriz identidad de orden n es

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz cuadrada de orden n con todos sus elementos iguales a cero es la matriz *nula*, y la denotamos por 0_n.

Definición 1.3. La transpuesta de una matriz A, denotada por A^T, es la matriz cuya fila i es igual a la columna i de A

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}.$$

2. Algebra de matrices

La *suma* de dos matrices $n \times m$ es la matriz cuyos vectores filas son las sumas de los correspondientes vectores filas de las dos matrices originales. Así, si $A = (a_{ij})_{j=1,\ldots,m}^{i=1,\ldots,n}$ y $B = (b_{ij})_{j=1,\ldots,m}^{i=1,\ldots,n}$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{j=1,\ldots,m}^{i=1,\ldots,n}.$$

Ejemplo 2.1. Encuentre $A + B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+4 & 3+0 \\ 9+5 & 6+(-2) & 5+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 14 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

El *producto* de una matriz por un *escalar* corresponde a multiplicar cada elemento de la matriz A por el escalar. Esto es, si $A = (a_{ij})_{j=1,\ldots,m}^{i=1,\ldots,n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{j=1,\ldots,m}^{i=1,\ldots,n}.$$

Ejemplo 2.2. Sea $\lambda = 3$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Luego $3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 9 & 3 \cdot 6 & 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 27 & 18 & 15 \end{pmatrix}$.

El *producto* de una matriz $n \times m$ por una matriz $m \times p$ es una matriz $n \times p$ cuyo elemento ubicado en la fila i y la columna j es el producto escalar del vector fila i de la primera matriz y el vector columna j de la segunda matriz. Así, si $A = (a_{ij})_{j=1,\dots,m}^{i=1,\dots,n}$ y $B = (b_{ij})_{k=1,\dots,p}^{j=1,\dots,m}$, la matriz $C = AB \in M_{n\times p}$ tiene elementos

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}.$$

Ejemplo 2.3. Calcule AB y BA, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & -4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$.

RESPUESTA: $AB = \begin{pmatrix} 49 & 8 = 2\cdot 6 + 1\cdot(-4) + 5\cdot 0 \\ 13 & -18 \end{pmatrix}$. Pero en cambio, BA no se puede calcular puesto que el número de columnas de B no coincide con el de filas de A.

2.1. **Propiedades.** Supongamos que las matrices en cada una de las siguientes leyes son tales que la operación indicada puede ser realizada y que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(1) $(A^T)^T = A$.
(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$.
(3) $A + B = B + A$ (propiedad conmutativa).
(4) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (propiedad asociativa).
(5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
(6) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
(7) La multiplicación de matrices no es siempre conmutativa, i.e., $AB \neq BA$.
(8) $A(BC) = (AB)C$ (propiedad asociativa).
(9) $A(B+C) = AC+AB$ y $A(B+C) = AB+AC$ (propiedad distributiva respecto a la adición).
(10) $I_nA = AI_n = A$ y $0_nA = A0_n = 0_n$.

Definición 2.4. Se dice que una matriz cuadrada A es regular o invertible si existe una matriz B tal que $AB = BA = I_n$. La matriz B es llamada la inversa de A y es denotada por A^{-1}.

Teorema 2.5. *La matriz inversa es única.*

La unicidad de A^{-1} puede ser probada fácilmente. Para ello, supongamos que B es otra matriz inversa de A. Entonces $BA = I_n$ y

$$B = BI_n = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = I_nA^{-1} = A^{-1},$$

por lo que $B = A^{-1}$.

2.2. **Propiedades.** Supongamos que las matrices en cada una de las siguientes leyes son regulares.

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$.
(2) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. Determinantes

A una matriz *cuadrada* A le asociamos un número real llamado el *determinante*, $|A|$ o $\det(A)$, de la siguiente manera,

Para una matriz de orden 1, $A = (a)$, $\det(A) = a$.

Para una matriz de orden 2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det(A) = ad - bc$.

Para una matriz de orden 3

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

El método es conocido como el *desarrollo* del determinante por la columna 1. El método se puede usar con cualquier fila o columna, dando el mismo resultado. Note el signo $(-1)^{i+j}$ que lleva delante el elemento a_{ij}.

Antes de seguir con la definición de forma inductiva, veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.1. Calcular el siguiente determinante desarrollando por la columna 2.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+2}2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -2\cdot(-3) + 3\cdot(0) - (1)\cdot 1 = 5\end{aligned}$$

Para matrices de mayor tamaño el método es el mismo que para matrices de orden 3, desarrollando el determinante por una fila o una columna y reduciendo de esta manera el orden de los determinantes que deben ser calculados. Para un determinante de orden 4 debemos calcular 4 determinantes de orden 3.

Definición 3.2. Dada una matriz A de orden n, el menor complementario del elemento a_{ij} de la matriz A es el determinante de la submatriz de orden $n-1$ que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de la matriz A. El adjunto del elemento a_{ij} de la matriz A es el menor complementario de a_{ij} multiplicado por $(-1)^{i+j}$.

De acuerdo con esta definición, el determinante de la matriz A puede ser definido como

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad \text{(por la fila } i\text{)}$$

o, equivalentemente

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad \text{(por la columna } j\text{).}$$

Ejemplo 3.3. Encuentra el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Respuesta: Desarrollando el determinante por la columna 3, obtenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

3.1. **Propiedades de los determinantes.** Sean A y B matrices cuadradas de orden n y $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) $|A| = |A^T|$.
(2) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.
(3) $|AB| = |A||B|$.
(4) Una matriz A es regular si, y sólo si, $|A| \neq 0$; en ese caso $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.
(5) Si en un determinante intercambiamos dos filas (o columnas) entonces el determinante cambia de signo.
(6) Si en un determinante dos filas (o columnas) son idénticas entonces el determinante es cero.
(7) Si multiplicamos todos los elementos de una fila (o columna) por una constante λ entonces el determinate se multiplica por esa constante.
(8) Si a una fila le sumamos un múltiplo de otra fila entonces el determinante no cambia.

El próximo resultado es muy útil para verificar si una matriz es regular.

Teorema 3.4. *Una matriz cuadrada A tiene inversa si, y sólo si, $|A| \neq 0$.*

4. Operaciones elementales con matrices. Matriz inversa

Las siguientes operaciones con filas y columnas de una matriz $A \in M_{n\times m}$ son llamadas operaciones elementales.

- Intercambiar líneas paralelas de A(filas o columnas).
- Multiplicación de una línea de A (fila o columna) por una constante diferente de cero.
- Sumar a una línea de A (fila o columna) un múltiplo de otra línea paralela.

Estas operaciones se pueden describir mediante el producto de matrices. Una operación en las filas de A es equivalente a multiplicar a la izquierda por una matriz *elemental* $E \in M_n$. De la misma manera, una operación en las columnas de A es equivalente a multiplicar a la derecha por una matriz *elemental* $E \in M_m$.

Como ejemplo, para intercambiar la fila 1 y 3 en la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$, multiplicamos a la izquierda por la matriz $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ para obtener

$$EA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para intercambiar filas 1 y 2, la matriz elemental es $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (por favor chequear). Para sumar a la fila 2 de A siete veces la fila 3, multiplicamos a la izquierda por la matriz $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ para obtener

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 52 & 69 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Para multiplicar la fila 2 por 5, multiplicamos a la izquierda por la matriz $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ para obtener

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 15 & 30 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Definición 4.1. Dadas dos matrices A y B del mismo tamaño, decimos que B es equivalente a A si podemos transformar A en B mediante un número finito de operaciones elementales.

Estamos interesados en calcular la inversa de una matriz regular mediante operaciones elementales.

Teorema 4.2. *Si $A \in M_n$ es regular, entonces A es equivalente a la matriz identidad I_n, esto es, existen matrices elementales $E_1, \ldots, E_r$ and $E'_1, \ldots, E'_r$ tales que $E_r \cdots E_1 A = I_n$ y $AE'_1 \cdots E'_r = I_n$.*

Por tanto la matriz inversa de A es $A^{-1} = E_r \cdots E_1 = E'_1 \cdots E'_r$. Esto dice que podemos encontrar la inversa de una matriz regular por medio de operaciones elementales a la matriz identidad I_n. Desde

un punto de vista práctico, el *método de Gauss* considera la matriz

$$(A|I_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

y realiza operaciones elementales a las filas hasta conseguir que A se transforme en la matriz identidad I_n, de modo que I_n se convierta en A^{-1}.

Ejemplo 4.3. Encontrar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

RESPUESTA: Considere la matriz $(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. En las siguientes operaciones, f_i denota la fila i, y $f_i - \lambda f_j$ quiere decir que a la fila f_i le restamos λ veces la fila f_j.

$$(f_3 - f_1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right); \quad (f_3 + f_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$(2f_2 - f_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad (2f_1 - f_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Por tanto, la matriz inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

5. Rango de una matriz

El concepto de rango de una matriz es fundamental en el estudio de sistemas lineales de ecuaciones.

Definición 5.1. La forma escalonada de una matriz $A \in M_{n\times m}$ es la matriz equivalente $B \in M_{n\times m}$ con ceros por encima (debajo) de la diagonal principal.

Definición 5.2. El rango de una matriz $A \in M_{n\times m}$ es el número de filas (columnas) diferentes de cero que tiene la forma escalonada de la matriz.

5.1. **Propiedades.** Sean $A, B \in M_{n\times m}$.

(1) Las matrices A y B son equivalentes si, y sólo si, $\text{rango}\,(A) = \text{rango}\,(B)$.
(2) $\text{rango}\,(A^T) = \text{rango}\,(A)$.
(3) $\text{rango}\,(A) \leq \min\{n, m\}$.
(4) Si A es cuadrada entonces $\text{rango}\,(A) = n$ si, y sólo si, $|A| \neq 0$.

Ejemplo 5.3. Encuentre el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Respuesta: El rango es como mucho 3. Encontremos una forma escalonada de A.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{2f_1+f_3}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{(1/2)f_2+f_3}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

De aquí que el rango de A es 3 (tres vectores filas no nulos en la forma escalonada de A).

Existe una definición alternativa de rango, equivalente a la dada anteriormente.

Definición 5.4. Dada una matriz $A \in M_{n\times m}$, un menor de orden r de A es cualquier determinante de orden r que puede ser formado con r filas y r columnas de A.

Teorema 5.5. *El rango de la matriz A coincide con el mayor orden que tiene un menor diferente de cero.*

Observe que para determinar el rango de una matriz A con este método, podemos usar cualquier matriz equivalente, en particular, la forma escalonada de la matriz A.

Ejemplo 5.6. Encuentre el rango de $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Respuesta: El rango es como mucho 3. En lugar de hallar la forma escalonada de A usamos los menores. Note que $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ por lo tanto, el rango de A es como menos 2. Si encontramos un menor de orden 3 diferente de cero entonces el rango es 3. Necesitamos chequear los 4 menores de orden 3

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Por lo que el rango de A es 2. Por supuesto, el mismo resultado es obtenido al hallar una forma escalonada

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_2-2f_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{f_3-f_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$